محرم نژاد ایردموسی*

پای تخته

مقدمه

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل‌نامهٔ برهان است که خود از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، تعدادی مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. در این شماره، پنج مسئلهٔ اول توسط خوانندگان مجله ارسال شده که با نام خودشان آن‌ها را ارائه کرده‌ایم. در همین‌جا هم از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید.

شما می‌توانید مسائل و راه‌حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

همان‌طور که وعده داده بودیم، در این شماره اسامی افرادی، را که راه‌حل‌ها و مسائل خود را برای مجله فرستاده بودند، ذکر می‌کنیم.

محمد طبیعی، دانش‌آموز «دبیرستان علامه طباطبایی» تهران، با حل بسیاری از مسائل دو شمارهٔ ۷۹ و ۸۰، گوی سبقت را از دیگر عزیزان ربودند که امیدواریم این تلاش مستمر خود را ادامه دهند. نفیسه آغویی، سمیرا قاسمی و ساناز ولی‌زاده، دانش‌آموزان «دبیرستان فرزانگان چهاردانگه»، امیرحسین کفاش امیری از شهر بابل، و معصومه بغدادی، دبیر ریاضی شهرستان ری، دیگر عزیزانی بودند که راه‌حل‌های خود را برای مجله فرستاده‌اند. از همهٔ آنان تشکر می‌کنیم. از راه‌حل‌های آن‌ها در این شماره استفاده کرده‌ایم.

خوشبختانه وبلاگ مجله نیز راه‌اندازی شده است و شما می‌توانید بعضی از بخش‌های مجله به‌ویژه مسائل پای تخته را قبل از چاپ مطالعه کنید. آدرس وبلاگ در صفحه شناسنامه، در کنار فهرست مطالب مجله، درج شده است.

بخش اول: مسئله‌ها

۹۱. (فرستنده: عطا طهوری، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تبریز)

اگر داشته باشیم: $\log_{6}^{15} = a$ و $\log_{12}^{18} = b$، حاصل $\log_{25}^{24}$ را برحسب a و b به‌دست آورید.

۹۲. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

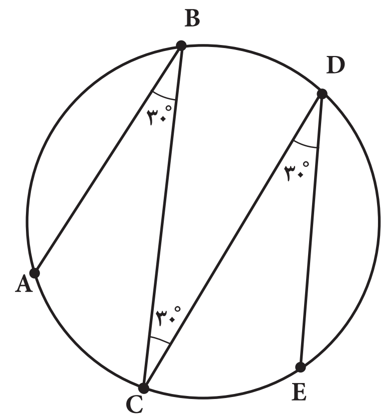
مربعی را داخل مربع دیگری انداخته‌ایم. ثابت کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به‌هم وصل کنیم، از چهار ناحیهٔ حاصل، مجموع مساحت دو ناحیه‌ای که مجاور به دو ضلع روبه‌روی مربع هستند، با مجموع مساحت دو ناحیهٔ دیگر برابر است.

۹۳. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

با فرض $f(x)=x-\frac{1}{x}$، معادلهٔ $f(f(x))=0$ چند ریشه در مجموعه اعداد حقیقی دارد؟

۹۴. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران)

مطابق شکل زاویه‌های بین هر دو وتر متوالی برابر است با ۳۰ درجه. ثابت کنید اگر $AB^2+CD^2=BC^2+DE^2$، آن‌گاه کمان AB ۹۰ درجه است.



شکل ۱

۹۵. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران)

مربع ABCD مفروض است. دایرهٔ S را به مرکز B و به شعاع AB، و نیم‌دایرهٔ L را به قطر AB و داخل مربع رسم می‌کنیم. روی نیم‌دایرهٔ L نقطهٔ M را در نظر بگیرید و BM را رسم کنید تا دایرهٔ S را در T قطع کند. ثابت کنید: $\angle DAT=\angle TAM$.

۹۶. در معادلهٔ $5(x^2+y^2+z^2)=1250-2xyz$، همهٔ متغیرها اعدادی اول هستند. معادله را حل کنید.

۹۷. در یک ساعت دیجیتالی که ساعت را با h، دقیقه را با m و ثانیه را با s نمایش می‌دهد، در چند زمان متفاوت $h+m=s$ اتفاق می‌افتد؟ ($0\le h\le 23$، $0\le m\le 59$، $0\le s\le 59$)

۹۸. بزرگ‌ترین مقدار λ را طوری پیدا کنید که نامساوی زیر به ازای همهٔ مقادیر حقیقی a، b، c و d برقرار باشد:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\ge ab+\lambda bc+cd$$

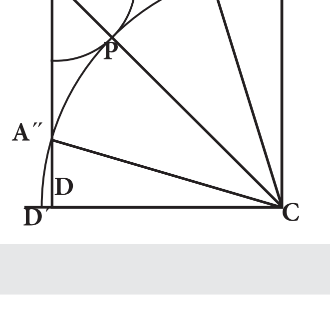
۹۹. سه مورچه روی رئوس مثلث ABC هستند و طول اضلاع AB، BC و CA به ترتیب برابر است با ۵، ۴ و ۳. اگر سه مورچه با سرعت یک واحد در ثانیه و در جهت $A\to B\to C\to A$ حرکت کنند، در چه لحظه‌ای از ۳ ثانیهٔ اول، مساحت مثلثی که سه رأس آن توسط مورچه‌ها مشخص می‌شود، مینی‌مم است؟

۱۰۰. مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,2013\}$ مفروض است. چند سه‌تایی از زیرمجموعه‌های S مانند (A,B,C) می‌توان ساخت به‌طوری که: $A\cup B\cup C=S$ و $B\subseteq A\cup C$؟

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۳۱. مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$ مفروض است. دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ می‌کشیم. دایرهٔ دوم را به مرکز C رسم می‌کنیم، به‌طوری که در نقطهٔ P روی AC بر دایرهٔ اول مماس شود. مساحت ناحیه‌ای داخل مربع را پیدا کنید که خارج دو دایره باشد.

راه‌حل: (از محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران) طول قطر مربع برابر ۴ است، در نتیجه: $AP+PC=4$. چون $AP=1$، پس $PC=3$. چون $2\sqrt{2}<3$، پس دایره به مرکز C، اضلاع AB و AD را به‌ترتیب در A' و A'' و امتداد BC و DC را به‌ترتیب در B' و D' قطع می‌کند. برای محاسبه مساحت ناحیهٔ $A'B'B$ (و $A''D'D$)، مساحت قطاع $A'B'C$ و مثلث $A'BC$ را از هم کم می‌کنیم. ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول $A'B$ را می‌یابیم که برابر ۱ است و سپس مساحت مثلث $A'BC$ را برابر $\sqrt{2}$ به‌دست می‌آوریم. مساحت قطاع $A'B'C$ نیز برابر $\frac{\sin^{-1}\frac{1}{3}}{2\pi}\times 9\pi=\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3}$ خواهد بود. با محاسبه مساحت ناحیه‌های $A'B'B$ و $A''D'D$ و مساحت ربع‌های دو دایره، مساحت خواسته شده برابر خواهد بود با: $8+2\sqrt{2}+9\sin^{-1}\frac{1}{3}-\frac{5}{2}\pi$.



شکل ۲

۳۲. برای هر دو عدد حقیقی x ثابت کنید:

$$(۲^{\sin x}+۲^{\cos x})^۲ \geq ۲^{۲-\sqrt{۲}}$$

راه‌حل: (از نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

طبق نامساوی حسابی ـ هندسی داریم: $۲^{\sin x}+۲^{\cos x} \geq ۲\sqrt{۲^{\sin x+\cos x}}$. در نتیجه: $(۲^{\sin x}+۲^{\cos x})^۲ \geq ۲^{\sin x+\cos x+۲}$

از طرف دیگر: $-\sqrt{۲} \leq \sin x+\cos x \leq \sqrt{۲}$. در نتیجه نامساوی حکم برقرار است.

۳۳. اگر P_n، nامین عدد اول باشد، برای هر $n \geq ۱۲$، ثابت کنید: $P_n > ۳n$.

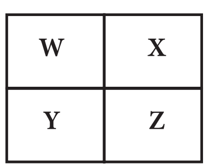
راه‌حل: (از نفیسه آغویی از دبیرستان فرزانگان چهاردانگه) مسئله را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم: $P_n \leq ۳n$. همهٔ اعداد ۱ تا ۳n را به n دستهٔ ۳تایی به این صورت افراز می‌کنیم:

$\{۱,۲,۳\}, \{۴,۵,۶\}, \{۷,۸,۹\}, ..., \{۳n-۲,۳n-۱,۳n\}$

چون $n \geq ۱۲$، پس دستهٔ $\{۳۴,۳۵,۳۶\}$ وجود دارد که هیچ عضوی از آن اول نیست. بنابراین اعداد اول $P_۱$ تا P_n باید عضو $n-۱$ دسته باشند. در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری دو عدد اول متوالی مانند P_i و $P_{i+۱}$ در یک دسته مانند $\{۳L-۲, ۳L-۱, ۳L\}$ می‌افتند. چون ۳L اول نیست، پس باید $۳L-۲$ و $۳L-۱$ اول باشند. اما یکی از این دو زوج است و مرکب خواهد بود که این موضوع تناقض محسوب می‌شود.

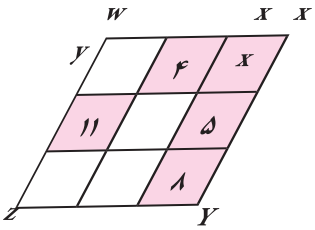
۳۴. مستطیلی مطابق شکل به چهار مستطیل کوچک‌تر با نام‌های w، x، y و z افراز شده است. اگر محیط مستطیل‌های w، x و y به ترتیب برابر ۲، ۳ و ۵ باشد، محیط مستطیل z را بیابید.

راه‌حل: (از معصومه بغدادی، دبیر ریاضی شهرستان ری) اگر طول ضلع افقی w را x فرض کنیم، طول ضلع عمودی آن برابر $۱-x$ و طول ضلع عمودی Y برابر $۲/۵-x$ خواهد شد. در نتیجه چون طول ضلع عمودی X برابر $۱-x$ است، طول ضلع افقی X برابر $x+۰/۵$ به‌دست می‌آید. بنابراین محیط z برابر است با: $۲(۲/۵-x+x+۰/۵)=۶$.



شکل ۳

۳۵. مطابق شکل، متوازی‌الاضلاع WXYZ به ۹ متوازی‌الاضلاع کوچک‌تر تقسیم شده است. محیط چهار تا از آن‌ها در شکل مشخص شده است. محیط متوازی‌الاضلاع میانی را بیابید، اگر محیط متوازی‌الاضلاع WXYZ برابر ۲۱ باشد.



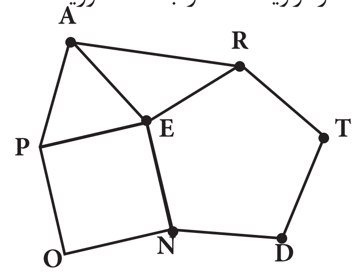
شکل ۴

راه‌حل: (از معصومه بغدادی، دبیر ریاضی شهرستان ری) مطابق شکل، طول دو ضلع را برابر x و y فرض می‌کنیم و با توجه به محیط‌های داده شده، طول بقیهٔ اضلاع را برحسب x و y به‌دست می‌آوریم. ضلع دوم متوازی‌الاضلاع با محیط ۵، برابر $۲/۵-x$ و سپس ضلع دوم متوازی‌الاضلاع با محیط ۱۱ برابر $۳+x$ به‌دست می‌آید. ضلع دوم متوازی‌الاضلاع با محیط ۴ برابر $۲-y$ و سپس ضلع دوم متوازی‌الاضلاع با محیط ۸ برابر $۲+y$ می‌شود. در نتیجه: $۲(x+۳+۲-y+x+y+۲/۵-x+y+۲)=۲۱$ که نتیجه می‌دهد: $x+y=۱$. اکنون محیط متوازی‌الاضلاع میانی برابر است با: $۲(۲-y+۲/۵-x)=۲(۴/۵-۱)=۷$.

۳۶. در ذوزنقه ABCD که AB و CD موازی هستند، داریم: $AB=۱۵$، $BC=۱۲$، $CD=۳۰$ و $AD=۹$. مساحت ذوزنقه را بیابید.

راه‌حل: (از محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران) از A و B دو عمود بر DC رسم می‌کنیم و پای عمودها را A' و B' می‌نامیم. داریم: $AA'=BB'$ و $A'B'=۱۵$. در نتیجه: $DA'+B'C=۱۵$. از طرف دیگر، از قضیهٔ فیثاغورس داریم: $A'D^۲=A'A^۲=۸۱-B'B^۲=۱۴۴-B'C^۲$. در نتیجه: $B'C^۲-A'D^۲=۶۳$. بنابراین: $B'C-A'D=\frac{۶۳}{۱۵}$. با توجه به $B'C+A'D=۱۵$، به‌دست می‌آید: $A'D=\frac{۲۷}{۵}$ و $B'C=\frac{۴۸}{۵}$. در نتیجه: $A'A=\sqrt{۸۱-A'D^۲}=\frac{۳۶}{۵}$ و مساحت ذوزنقه برابر $\frac{A'A}{۲}(AB+CD)=\frac{۳۶}{۵}\times\frac{۴۵}{۲}=۱۶۲$ خواهد شد.

۳۷. در شکل، TREND یک پنج‌ضلعی منتظم و PEA یک مثلث متســـاوی‌الاضلاع و OPEN یک مربع است. اندازهٔ زاویه EAR را به‌دست آورید.



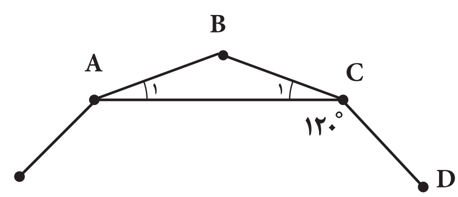
شکل ۵

راه‌حل: (از سمیرا قاســـمی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه) می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ n ضلعی منتظم برابر اســـت با: $\frac{\pi(n-۲)}{n}$. در نتیجه اندازهٔ هر زاویهٔ پنج‌ضلعی منتظم، مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع برابـــر اســـت بـــا ۱۰۸°، ۹۰° و ۶۰°. پـــس زاویهٔ AER برابر $۱۰۲^\circ=(۶۰^\circ+۹۰^\circ+۱۰۸^\circ)-۳۶۰^\circ$ خواهد شـــد. از طرف دیگر داریـــم: AE=PE=NE=ER و مثلث AER متساوی‌الساقین است. پس اندازهٔ زاویهٔ EAR برابر است با: $\frac{۱۸۰^\circ-۱۰۲^\circ}{۲}=۳۹^\circ$.

۳۸. در شکل قسمتی از یک n ضلعی منتظم نشان داده شـــده است. اگر زاویهٔ ACD برابر ۱۲۰° باشد، n را بیابید.

راه‌حل: (از معصومه بغدادی، دبیر ریاضی شهرستان ری) چون AB=BC، پس: $C_۱=A_۱=\alpha$. از طرف دیگر:

$$A\hat{B}C = B\hat{C}D = C_۱+۱۲۰$$



شکل ۶

همچنین اندازهٔ هر زاویه nضلعی منتظم برابر است با: $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$. در نتیجه:

$$A_۱+B+C_۱=۱۸۰\Rightarrow\alpha+۱۲۰+\alpha+\alpha=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow\alpha=۲۰^\circ\Rightarrow B=۱۴۰^\circ$$

کـــه نتیجه می‌دهـــد: $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}=۱۴۰$. با حل معادله به پاسخ n=۹ می‌رسیم.

۳۹. آیا می‌توان این مربع را به یک مربع جادویی تبدیل کرد؟

			۱۲
	۱۶	۱	۱۰
	۲	۱۵	۸

شکل ۷

راه‌حل: (از محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرســـتان علامه طباطبایی تهران) چون مجموع اعداد جدول برابر است با $\frac{۱۶\times۱۷}{۲}$، در نتیجه مجموع اعداد هر سطر، هر ســـتون و هر قطر باید برابر $\frac{۱۳۶}{۴}=۳۴$ باشد. در نتیجه مـــکان اعـــداد ۴، ۹، ۷، ۵ و ۱۳ به ترتیـــب در جدول مشخص می‌شود. برای چهارخانهٔ باقی‌مانده اعداد ۳، ۶، ۱۱ و ۱۴ باقی می‌مانند که با بررســـی حالت‌ها به این نتیجه می‌رسیم که پاسخ مسئله منفی است.

		۱۳	۴
		۵	۱۲
۷	۱۶	۱	۱۰
۹	۲	۱۵	۸

شکل ۸

۴۰. عدد ســـه رقمـــی $\overline{abc}$ را بیابیـــد، به‌طوری که $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$.

راه‌حل: (از سمیرا قاســـمی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

$$۱۰۰a+۱۰b+c=۱۰a+b+۱۰b+c+۱۰c+a$$

$$\Rightarrow ۸۹a=۱۰c+b$$

از طـــرف دیگـــر: $۰\le ۱۰c+b\le ۹۹$ پـــس: a=۱ و ۱۰c+b=۸۹. در نتیجه: b=۹ و c=۸ و $\overline{abc}=۱۹۸$.

* iradmusa@yahoo.com